Příklady k cvičení č.8

III.1. Náhodný výběr

Cvičení 1. Uvažujte náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p}{x^{p+1}} & \text{pro } x \geq 1, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $p > 2$ je neznámý parametr. Odhadněte parametr p momentovou metodou.

Cvičení 2. Lze předpokládat, že počet gólů vstřelených v jednom fotbalovém zápase v jedné konkrétní soutěži se řídí Poissonovým rozdělením s neznámým parametrem $\lambda > 0$ a že počty gólů vstřelené v různých zápasech jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny. Budeme zaznamenávat počty gólů v n zápasech a naměříme tak veličiny $X_1, \dots, X_n$.

(a) Nalezněte odhad parametru λ momentovou metodou a zjistěte, zda je tento odhad nestranný a konzistentní.

(b) Uvažujte odhady $\hat{\lambda}_n = (X_1 + X_n)/2$ a $\tilde{\lambda}_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Zjistěte, zda jsou tyto odhady nestranné a konzistentní odhady λ. Který z nich je rozumnější?

(c) Navrhněte odhad pravděpodobnosti, že v zápase padne přesně 6 gólů. Vyšetřete vlastnosti takového odhadu.

Cvičení 3. Na cvičení od 10:40 je nahlášeno 23 studentů (od 12:20 26). Počet studentů, kteří opravdu dorazí je náhodná veličina. Lze předpokládat, že návštěvnosti v jednotlivých týdnech jsou na sobě nezávislé náhodné veličiny s binomickým rozdělením $Bi(23, p)$ (resp. $Bi(26, p)$) s neznámým parametrem $p \in (0, 1)$.

(a) Navrhněte odhad $\hat{p}_n$ parametru p momentovou metodou pro realizace $X_1, \dots, X_n$. Rozhodněte, zda je tento odhad nestranný a konzistentní.

(b) Spočítejte odhad z (a) pro skutečné návštěvnosti, které na předchozích cvičeních byly:

- 10:40... $21, 21, 20, 18, 18, 18$
- 12:20... $24, 21, 25, 23, 23, 24$

(c) Navrhněte dva různé odhady pravděpodobnosti, že na cvičení dorazí více než 20 studentů. Diskutujte jejich vlastnosti a porovnejte jejich hodnoty pro naše data.

(d) Odhadněte pravděpodobnost, že na cvičení nedorazí ani jeden student.